数理解析研究所講究録
475 巻 1982 年 105-116

P群とcorestriction algebras

北大理学部　池田　正　(Tadashi Ikeda)

M. Broué, L. Puig は誘導加群を環論的に一般化してcorestriction algebra を導入し、いくつかの応用を与えている([2] [5])。これらの基礎は M. Broué によるイリノイ大の講議としてまとめられているが、邦語では津島[6]による簡潔な紹介がある。ここでは次の誘導加群とblockに関する D. Burry の結果(定理2.1)を corestriction algebraにまで拡張することを目標とする。

1. interior G-algebra と corestriction algebara

記号は以下の通りとする。

$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$: complete discrete valuation ring with maxmal ideal $\mathfrak{m}$

$k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$: characteristic $p > 0$

$R = \mathcal{O}$ 又は k

$B(e)$: G の p-block で e がその central primitive idempotent

$D(B)$: B の defect group

定義 Aを有限生成 R-algebra とし，R-algebra homomorphism $\rho: RG \longrightarrow A$ が与えられた時，A_ρ を interior G-algebra とよぶ．

定義 B_ρ を interior RH-algebra（但し $H \leq G$）とした時．

$$A = RG \otimes_{RH} B \otimes_{RH} RG$$

$$(\text{積})\ (g_1 \otimes b \otimes g_2^{-1})(g_1' \otimes b' \otimes g_2'^{-1}) = \begin{cases} 0 & g_2H \neq g_1'H \text{ のとき} \\ g_1 \otimes b\,\rho(g_2^{-1}g_1')\,b' \otimes g_2'^{-1} & g_2H = g_1'H \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\rho_H^G(x) = \sum_{g \in [G/H]} xg \otimes 1 \otimes g^{-1}$$

（但し $g_1, g_2, g_1', g_2', x, \in G$　$b, b' \in B$
$[G/H]$ は G の H による left coset の代表系）

とおくと interior G-algebra を作る．これを B_ρ の corestriction algebra とよび $(Cor_H^G B\ \ \rho_H^G)$ で記す．

interior G-algebra, corestriction algebra の性質は浮島［ ］にゆずるが．加群との関係は，これは丁度，M を RG-加群としたとき，$A = End_R(M)$ $\rho: RG \longrightarrow End_R(M)$：表現，とおくと A_ρ は interior G-algebra になり $H \leq G$ に対して M を RH-加群とし $Cor_H^G(End_R(M))\ \rho_H^G$ が $End_R(M^G)_{\rho'}$（ρ' は M^G の表現）と同型となることである（[6] example 3）

なおその他の記号は浮島［6］に従い次の様にする．

A_ρ を interior G-algebra としたとき

$H \leq G$ に対し　$A^H = \{a \in A \mid \rho(h^{-1})a\rho(h) = a \text{ for } \forall h \in H\}$

$H \leq K \leq G$ に対し　$Tr_H^K: A^H \longrightarrow A^K$

$$\begin{array}{ccc} A^H & \longrightarrow & A^K \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ a & \longmapsto & \sum_{k \in [H\backslash K]} a^k = \sum_{k \in [H\backslash K]} \rho(k^{-1})a\rho(k) \end{array}$$

$Tr_H^K(A^H) = A_H^K$ とし，A_H^KはA^Kの両側idealになる。

$P \le G$: p-部分群とし $I^P(A) = \sum_{Q \neq P} A_Q^P + \mathfrak{J}A^P$ とすると

$I^P(A)$はA^Pの両側idealとなる。この時，標準写像

$$A^P \longrightarrow A^P/I^P = A(P)$$

をBr_Pで表しPによるBrauer homomorphismと呼ぶ。

$H \le G$とし，B_ρをinterior H-algebraとし，$A = Cor_\rho^G B$とする。

今，$g, g' \in G$に対し $e_{gg'} = g \otimes 1 \otimes g^{-1}$ で表すと，

$$\{ e_{gg'} \mid g, g' \in [G/H] \}$$

はAのR-基底をなし，$g, g', h, h' \in [G/H]$に対し

$$e_{gg'} \cdot e_{hh'} = \delta_{g'h}\, e_{gh'} \quad (\delta_{g'h} : \text{Kronecker の記号})$$

が成立する。

以下，interior algebra, corestriction algebraのいくつかの性質を述べておく。

(1-1) $H \le G$で，B_ρ, $B'_{\rho'}$を2つのinterior H-algebrasで $\ker\rho \subset \ker\rho'$が成立すると仮定すると $\ker\rho_H^G \subset \ker\rho'^G_H$が成立する。更に$\rho$がinjectionならば$\rho_H^G$もinjectionになる。

(証明) 以下，Gの元gに対し $g = \bar{g}\,\underline{g}$ ($\bar{g} \in [G/H]$, $\underline{g} \in H$)と表すことにする。今RGの元 $x = \sum_{g \in G} a_g \cdot g$ が$\rho_H^G(x) = 0$を満たしていると仮定する。定義に従って次の式が成立する。

$$\rho_H^G(x) = \sum_{g \in [G/H]} \sum_{h \in [G/H]} \Big(\sum_{y \in H} a_{ghy\underline{g}^{-1}} \rho(\underline{ghy}) \Big) e_{\overline{gh}, g}$$
$$= 0$$

ところが，$g.h\in[G/H]$ に対し $e_{gh,g}$ はすべて異なっているから，$\mathrm{Cor}_H{}^G B$ の基底をなす．よってすべての $g.h\in[G/H]$ に対し

$$\sum_{y\in H} a_{ghygy^{-1}}(\rho(gh\cdot y)) = \rho\Big(\sum_{y\in H} a_{ghygy^{-1}}\, gh\cdot y\Big) = 0$$

が成立し $\ker\rho \subset \ker\rho'$ より

$$\sum_{y\in H} a_{ghygy^{-1}}\rho'(gh\cdot y) = 0$$

となり，逆にたどって $\rho'(x)=0$ がいえ証明される ‖

次の例も後に利用される

(1-2) $P \triangleleft G$: p-群，$\rho_0 : RP \longrightarrow R$: augumentation map とし $(\mathrm{Cor}_P{}^G R, \rho_{0P}{}^G)$ を作ると，RG の任意の centrally primitive idempotent e に対し $\rho_{0P}{}^G(e)\neq 0$ となる．

(証明) $(\mathrm{Cor}_P{}^G R)^G \cong R[G/P]$ となり natural map $G\longrightarrow G/P$ から作られる RG から $R[G/P]$ への準同型を τ とすると上の同型を通して

$$\tau\big|_{Z(RG)} = \rho_{0P}{}^G\big|_{Z(RG)}$$

が成立する．一方 $\ker\tau \subset J(RG)$ より容易に示される ‖

<u>定義</u> A_ρ, $A'_{\rho'}$ を interior G-algebras とし，A'^G の巾等元 e' に対し，

$$\begin{array}{rcl} \rho'^{e'} : RG & \longrightarrow & e'A'e' \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & e'\rho'(x) \end{array}$$

とすると $(e'A'e', \rho'^{e'})$ は再び interior G-algebra となる．ここで A_ρ と $(e'A'e')_{\rho e'}$ が同型な時，A_ρ は $A'_{\rho'}$ に direct embed されていると呼ぶ．

定義　A_ρ を interior G-algebra とし，$\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とする．この時

$\cdot\ A^\sigma = A$ （基礎の algebra は同じ）

$$\cdot\ \rho^\sigma : RG \longrightarrow A^\sigma, \quad g \longmapsto \rho(g^{\sigma^{-1}})$$

とすると新しい interior G-algebra (A^σ, ρ^σ) が定義される．

次の2つの補題は容易に示される

(1-3)　A_ρ, $A_{1\rho_1}$, $A_{2\rho_2}$ を3つの interior G-algebras とし，α_i を A_ρ を $A_{i\rho_i}$ 内に direct embed する ~~homomorphism~~ $(i=1,2)$ とする．この時 A_1^G 内に原始巾等元 e_1，A_2^G 内に原始巾等元 e_2 があって，e_1, e_2 のそれぞれの defect group（[6] の [1.8] 参）は同じである．

(1-4)　A_ρ: interior G-algebra，$\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ としたとき，$A^G = (A^\sigma)^G$ となり，A^G の原始巾等元 e に対し e の $(A^\sigma)^G$ 内での defect group は D を e の defect group として，D^σ となる．

2．p-群と corestriction algebras

1．の準備を用いてこの小論の目標である D. Burry の結果の拡張とその証明をこの節で与える．

定理 2.1 (D. Burry)　P を G の p-部分群，U を vertex が P となる直既約 kG-加群と仮定する．この時 defect group が P を含む G の任意の block B に対し U^G の直既約直和因子で B に属しかつ vertex が P となるものが存在する．

これを corestriction algebra に拡張すると次の様になる

定理 2.2　P を G の p-部分群，B_P は interior P-algebra とし，B^P は local で，B^P の原始巾等元 1 の defect group は P と仮定する．この時，B_P の corestriction algebra を $(\mathrm{Cor}_P^G B\ \ \rho_P^G)$ とし，defect group が P を含む任意の RG の centrally primitive idempotent e に対し $\rho_P^G(e) \neq 0$ となり，更に $\rho_P^G(e) = f_1 + f_2 + \cdots + f_\ell$ と $(\mathrm{Cor}_P^G B)^G$ 内で直交原始巾等元分解をすると，ある f_i に対し f_i の defect group は P となる．

証明は次の形に書き直しておこなう

定理 2.3　定理 2.2 の仮定のもとで，corestriction algebra $(\mathrm{Cor}_P^G B\ \ \rho_P^G)$ の P に依る Brauer homomorphism を $Br_P : (\mathrm{Cor}_P^G B)^P \longrightarrow (\mathrm{Cor}_P^G B)(P)$ とし，defect group が P を含む任意の RG の centrally primitive idempotent を e とすると $Br_P \circ \rho_P^G(e) \neq 0$ が成立する．

((2.2) と (2.3) の同値性の証明)　Brauer homomorphism による defect group の特徴付け ([E] の (1.8)) と Higmann の criterion の corestriction algebra への拡張 ([I] Ch II (2.7)) を用いて容易に示される．∎

以下，(2.3) をまず $P \triangleleft G$ の場合示し，一般の場合を証明する．そのため (2.3) の証明が完結するまで次の記号を用ることにする．

P: G の p-部分群．

B_P: interior P-algebra で Th 2.2 の仮定を満たしているもの

$(A, \rho_P^G) = (\mathrm{Cor}_P^G B, \rho_P^G)$: B の corestriction algebra

e: defect group が P を含む RG の centrally primitive idempotent.

$Br_P : A^P \longrightarrow A(P)$: (A, ρ_P^G) の Brauer homomorphism

(2.4) $P \lhd G$ とし、f を A^G の原始巾等元とすると、f の defect group は必ず P となり特に $Br_P(f) \neq 0$ となる。

(証明) $A = \mathrm{Cirp}^G B$ 内で $e_{11} = 1 \otimes 1 \otimes 1$, $\rho_P^G(g^{-1}) e_{11} \rho_P^G(g) = e_{11}^g$ と記すと $P \lhd G$ より $e_{11}^g \in A^P$ ($g \in G$) が成立する。更に e_{11} が A^P の原始巾等元より e_{11}^g も A^P の原始巾等元となる。(1.4)を用いて e_{11}^g の A^P での defect group は P となる。次に f の defect group を D とおくと容易に $D \leq P$ がいえる。今 $|D| \neq |P|$ と仮定する。$f \in A^G \subset A^P$ より f を A^P 内で直交原始巾等元分解するとその分解内に A^P での defect group が D となるものが現れる。一方 A^P の原始巾等元の defect group はすべて P となるからこれは $|D| \neq |P|$ に矛盾する。 //

(2.5) $P \lhd G$ のとき定理2.3は正しい。

(証明) diagram $\quad R[G]^G \xrightarrow[\rho_P^G]{} A^G \xrightarrow[Br_P]{} A(P) \quad$ において $Br_P \circ \rho_P^G(e) \neq 0$ を示せばよい。(2.4)より $\rho_P^G(e) \neq 0$ を示せばよい。ところが(1.2)(1.1)を用いると、$\rho_P^G(e) \neq 0$ が示される。 //

次に一般の場合を示すが、次の補題は Green の transfer 定理の類似で有益である。

(2.6) (Green [4] 参照) $N = N_G(P)$ とし、B_P の corestriction algebra $(\mathrm{Cirp}^N B, \rho_P^N)$ を $(\tilde{A}, \tilde{\rho}_P)$ と記すことにする。このとき interior N-algebra として $A(P)$ と $\tilde{A}(P)$ は同型になり 特に $A(P)^N$ と $\tilde{A}(P)^N$ は algebra として同型になる。

(証明) A^G 内で 1 を次のように直交原始巾等元分解する

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_r + e_{r+1} + \cdots + e_n$$

但し

$$e_i \text{の defect group } (D(e_i)) \begin{cases} =_G P & i = 1, 2, \cdots, r \\ \lneqq_G P & i = r+1, r+2, \cdots, n \end{cases}$$

$A^G \subset A^N$ より e_i を更に A^N 内で直交原始巾等元分解しておく．

$$e_i = f_{i1} + f_{i2} + \cdots + f_{in_i}$$

[6] 1.9 の論法を用いて，$1 \leq i \leq r$ に対して，

"f_{i1} の defect group が P で f_{ij} の defect group が P より更に小さい $(j = 2, 3, \cdots, n_i)$"

と仮定してよい．ここで

$$f = f_{11} + f_{21} + \cdots + f_{r1}$$

とおくと f は A^N の巾等元となり $1 - f \in I^P(A) = \sum_{Q<P} A_Q^P + \mathfrak{m}A^P$ となる．

一方 $fAf \oplus fA(1-f) \oplus (1-f)Af \oplus (1-f)A(1-f) = A$ より 上のことから

$$fAf(P) \cong A(P) \quad (\text{interior } N\text{-algebra として})$$

が示される．一方 $\tilde{A}^N$ 内で 1 を直交原始巾等元分解する．

$$1 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_s + \tilde{f}_{s+1} + \cdots + \tilde{f}_m$$

但し

$$\tilde{f}_i \text{の defect group } (D(\tilde{f}_i)) \begin{cases} =_N P & i = 1, 2, \cdots, s \\ \lneqq_N P & i = s+1, \cdots, m \end{cases}$$

全く同様にして，$\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_s$ として

$$\tilde{f}\tilde{A}\tilde{f}(P) \simeq \tilde{A}(P) \quad (\text{interior } N\text{-algebra として})$$

が成立する．

今 (A, P_P^G) を N に制限したものを $(\mathrm{Res}^G_N A, (P_P^G)_N)$ とする．また

A 内で $e_{gg'} = g\otimes 1\otimes g'^{-1}$ $(g, g' \in [G/P])$ を考え、$\tilde{A}$ 内で $\tilde{e}_{gg'} = g\otimes 1\otimes g'^{-1}$ $(g, g' \in [N/P])$ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \tilde{A} & \longrightarrow & \mathrm{Res}^G_N A \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \tilde{e}_{gg'} & \longmapsto & e_{gg'} \end{array} \qquad (g, g' \in [N/P])$$

とすると β は $(\tilde{A}, \rho_P^N)$ を $(\mathrm{Res}^G_N A, (\rho_P^G)_N)$ へ direct embed する。更に $\beta(1) = \mathrm{Tr}_P^N(e_{11})$, $\beta(\tilde{f}) = f$ が成立して、$(\tilde{f}\tilde{A}\tilde{f}, (\rho_P^N)^{\tilde{f}})$ と $(fAf, (\rho_P^G)^f)$ は interior N-algebra として同型になる。よって完全に証明された //

この補題を用いて一般の場合の定理 2.3 を証明する。

(定理2.3の証明) G における P による通常の Brauer homomorphism を s とし、$N = N_G(P)$ $C = C_G(P)$ とする。このとき定義より次の homomorphism ρ_P が存在する。

$$\begin{tikzcd} R[G]^P \arrow[r, "\rho_P^G"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A^P \arrow[d, "Br_P"] \\ R[C]^N \arrow[r, "\rho_P"] & A(P)^N \end{tikzcd}$$

同様に次の diagram も作れる

$$\begin{tikzcd} R[N]^P \arrow[r, "\rho_P^N"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{A}^P \arrow[d, "Br_P"] \\ R[C]^N \arrow[r, "\tilde{\rho}_P"] & \tilde{A}(P)^N \end{tikzcd}$$

ところが (2.6) の $A(P)^N$ と $\tilde{A}(P)^N$ との同型写像を β とおくと、次の diagram が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
R[G]^G \arrow[r, "\rho_p^G"] \arrow[d, "s"'] & A^G \arrow[d, "Brp"] \\
R[G]^N \arrow[r, "\rho_p"] \arrow[dr, "\tilde{\rho}_p"'] \arrow[dd, dotted, shift left, "\iota"] & A(p)^N \\
 & \tilde{A}(p)^N \arrow[u, "\wr\ \beta"'] \\
R[N]^N \arrow[uu, "s'"] \arrow[r, "\rho_p^N"'] & \tilde{A}^N \arrow[u, "Brp"']
\end{tikzcd}
$$

更に ι を $R[G]^N$ から $R[N]^N$ への包含写像とすると $Brp\circ\iota = id$ となる.

(2.5) より $Brp\cdot\rho_p^N(e') \neq 0$. (但し, e' は RN^N の原始巾等元) が成立する.

今 $e' = \iota\circ s(e)$ とおくと

$$Brp\,\rho_p^N(e') \neq 0$$

より上の可換性から

$$\tilde{\rho}_p\, s(e) \neq 0$$

よって $\rho_p\cdot s(e) = Brp\,\rho_p^G(e) \neq 0$ が示されて完全に証明された. ||

3. 応用

1で注意した interior G-algebra と RG-加群の関係を用いると, 容易に, 定理 2.2 から定理 2.1 を導くことができる. 更に K ($\mathcal{O}$の商体) が代数閉体の時, 定理 2.2 はもう少し拡張することができる.

系3.1　$\mathcal{O}$の商体 K が代数的閉体とし、P を G の p-部分群、B_P を interior P-algebra で B^P が local、B^P の原始巾等元 1 の defect group が $Q \leq P$ と仮定する。この時 B_P の corestriction algebra を $(Cor_P^G B, \rho_P^G)$、defect group が Q を含む任意の RG の centrally primitive idempotent を e とすると、$\rho_P^G(e) \neq 0$ となり、更に $\rho_P^G(e) = f_1 + \cdots + f_\ell$ と $(Cor_P^G B)^G$ 内で直交原始巾等元分解すると、ある f_i に対し f_i の defect group は Q となる。

(証明) Higmann の criterion の corestriction algebra への一般化と Green の定理の corestriction algebra への一般化 ([1] Ch II. 3.7 又は [6] (2.9) 参) を用いてある interior Q-algebra $B'_{P'}$ で B'^Q は local、B'^Q の原始巾等元 1 の defect group が Q となるものがあって、B_P は $(Cor_Q^P B', \rho'^P_Q)$ と interior P-algebra として同型になることがわかる。よって、$(Cor_P^G B, \rho_P^G)$ と $(Cor_Q^G B', \rho'^G_Q)$ は interior G-algebra として同型になるから定理2.2 が適応される。//

従って定理2.1を導いた方法と全く同様にして、次の系をえる。

系3.2　$\mathcal{O}$の商体 K が代数的閉体とし、P が G の p-部分群、V を vertex が $Q \leq P$ となる直既約 RP-加群と仮定する。この時、defect group が Q を含む任意の G の block B に対し、V^G の直既約直和因子で vertex が Q となりかつ B に属しているものが存在する。

更に系3.2に於いて、R を K に係数拡大することによって、KG-加群の場合へも拡張することができ次の系をえる。

系 3.3　$\mathcal{O}$ の商体 K が splitting field とし W を既約 kP-加群で B を defect group が P を含む G のブロックとする。この時 W^G の既約因子で B に属しているものが必ず存在する。

（参考文献）

[1] M. Broué, Illinois Univ. での講義録

[2] M. Broué and L. Puig, Character and local structure in G-algebras, J. Alg. 63 (1980), 306-317

[3] D Burry, The distributions of modular representations into blocks, Proc. of. A. M. S. 78 (1980), 14-16

[4] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, J. Alg. 1 (1964), 73-84

[5] L. Puig, Sur theoreme de Green, Math. Z. 166 (1979) 117-129

[6] 津島行男, modular 表現の現状と問題, 数理研考究録 429 (1981), 22-36